Au collège

Approche algébrique.

On peut, pour essayer de comprendre pourquoi $0^0=1$ revenir à la définition donnée dans les petites classes de la fonction puissance.
Soit maintenant comme définition de la puissance: $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n fois)
Le nombre réel a est multiplié n fois par lui-même avec a un nombre entier. Alors cette définition nous amène à la relation suivante:
Pour tout entier n et m on a : $a^{n+m} = a^n \times a^m$
Si on prend m = 0 et n différent de zéro, alors on a $a^n = a^0 \times a^n$. Si a est différent de zéro, alors cela implique que $a^0 = 1$. Il est alors très tentant d'étendre la relation à a = 0, et donc: $0^0 = 1$. On notera, cependant, que si l'on pose $0^0 = 0$, alors la relation reste vraie.

Approche ensembliste .

Compter les mots (analogue plus intuitif de l'argument ensembliste)

On peut rendre ce dernier raisonnement plus intuitif en utilisant un modèle équivalent, celui de la construction de mots de longueur finie avec un alphabet fini. Ce modèle est équivalent à la définition ensembliste, un mot étant défini comme une suite finie de lettres, donc une application de {1, 2... n} vers un alphabet qui est aussi un ensemble fini (par exemple {a, b, c}).

C'est ainsi que 35 est le nombre de mots de 5 lettres qu'on peut construire avec un alphabet de 3 lettres : #{aaaaa, aaaab, aaaac, aaaba, aaabb, aaabc, aaaca, ... cccca, ccccb, ccccd} = 35.

Pour voir ce qui se passe si l'un des termes est nul, écrivons les mots entre parenthèses, ce qui nous permet d'écrire le mot vide (). Avec notre alphabet de 3 lettres, on voit bien qu'il y a 1 mot vide, 3 mots d'une lettre, 9 mots de 2 lettres, ... 3k mots de k lettres. On retrouve donc la règle que $n^0 = 1$.

Si l'alphabet lui-même est vide, on ne peut pas construire de mots de longueur strictement positive, puisqu'on n'a aucune lettre à disposition. On retrouve ainsi que 0n = 0 pour n > 0.

Par contre, l'unique et providentiel mot vide peut s'écrire avec n'importe quel alphabet, même vide. On n'a pas de lettres à disposition, mais puisqu'on n'en a aucune à placer, le handicap disparaît comme par enchantement... ce qui donne à nouveau $0^0 = 1$.

Les mots Avec un alphabet de 3 chiffres, {1; 2; 3}, on peut former

$1 = 3^0$ nombre de 0 lettres : 3^0	()		
$3 = 3^1$ nombres de 1 lettre	(1) (2) (3)		
$9 = 3^2$ nombres de 2 lettres	(11) (12) (13)	(21) (22) (23)	(31) (32) (33)
$27 = 3^3$ nombres de 3 lettres	(111) (112) (113) (121) (122) (123) (131) (132) (133)		
	(211) (212) (213) (221) (222) (223) (231) (232) (233)		
	(311) (312) (313) (321) (322) (323) (331) (332) (333)		

etc.
Avec un alphabet de 0 lettres, c'est-à-dire un ensemble vide {}, on peut former
1 mot de 0 lettres : le mot vide () $0^0 = 1$
Aucun mot d'une lettre ou plus... : $0^n = 0$ pour n > 0

Conclusion.

Ainsi, par convention 0^0 est en général égal à 1, parce que cela arrange nombre de formules, notamment celles sur les polynômes.
Mais ce n'est pas une généralité. Il peut en effet être plus utile de poser que $0^0 = 0$ dans certains cas. Nous avons vu que cela n'amène aucune contradiction dans la théorie algébrique.

N'oubliez pas: c'est juste une convention utilite.